# EUCLIDES

*MAANDBLAD*
*VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE*

*ORGAAN VAN*
*DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*
*EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.*

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

X — 15 JULI 1963

INHOUD



**P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN**

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.



De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

*Boeken ter bespreking* en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

*Artikelen ter opname* aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

*Opgaven voor de „kalender"* in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

# EUCLIDES

*MAANDBLAD*
*VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE*

*ORGAAN VAN*
*DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*
*EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.*

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

**P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN**

## INHOUD VAN DE 38STE JAARGANG

### ARTIKELEN



### VOORDRACHTEN



### RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN



BESPREKING EN AANKONDIGING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

**Besproken boeken;**

BERICHTEN

# GRAFISCHE OF MEETKUNDIGE VOORSTELLING VAN EEN VERGELIJKING?

door

Dr. P. BRONKHORST

Eindhoven

Bovenstaande uitdrukking is bij ons — zacht gezegd — ongebruikelijk; in België gewoon. Ik meen dat we hier van onze zuiderburen kunnen leren. De definitie is simpel: De grafische of meetkundige voorstelling van een vergelijking $f(x, y) = 0$ is de verzameling van de punten, waarvan de coördinaten aan de gegeven vergelijking voldoen.

De vraag is of door deze uitdrukking de moeilijkheden voor het uit elkaar houden van functies en vergelijkingen groter of kleiner worden. Als de toestand in ons onderwijs in deze materie bevredigend was, zou ik er niet over schrijven. Er zijn echter, ook na het uitermate verhelderend artikel van Dr. J. Koksma in de 25e jaargang van Euclides, nog verschillende problemen over.

Als men b.v. de strijdigheid van 2 vergelijkingen van de eerste graad met 2 onbekenden meetkundig wil toelichten, neemt men zijn toevlucht tot de analytische meetkunde. Men constateert dan dat de vergelijkingen van 2 evenwijdige lijnen strijdig zijn. Dit is echter juist de omgekeerde weg.

Als bij de kwadratische functie $(x - 3)^2 + 5$ aangegeven wordt, dat de symmetrie-as van de grafiek de lijn $x = 3$ is, dan is hier een vermenging van functies en vergelijkingen.

Als men uit de *functies* $x = a \sin t$ en $y = b \cos t$ de parameter $t$ elimineert, krijgen we de *vergelijking* van de ellips. Ook hier functies en vergelijking door elkaar.

Een opgave van het eindexamen HBS in 1934 werd aldus geformuleerd: „Door de vergelijking $xy - cy + ax + b = 0$ wordt $y$ als functie van $x$ gegeven. Bepaal de coëfficiënten $a$, $b$ en $c$ als verder gegeven is:

1⁰ de grafiek dezer functie heeft $x = 2$ tot asymptoot enz."

De rest van het vraagstuk is niet van belang; duidelijk is hier een vermenging van functie en vergelijking.

Een opgave van het eindexamen HBS in het voormalige Ned. Indië deed het dan beter:

Gegeven de functie $y = \frac{9x - 36}{2x + 8}$; onder c en e werd gevraagd de plaats van de asymptoten van de grafiek te bepalen. De kandidaat moest dus antwoorden: een lijn evenwijdig aan de $Y$-as op een afstand 4 aan de linkerkant; en een lijn evenwijdig aan de $X$-as op een afstand $4\frac{1}{2}$ erboven.

In Kruytbosch-Richter, „Schriftelijke opgaven HBS-B" staat onder algebra II-3 het volgende vraagstuk:

a) Los $x$ en $y$ op uit het stelsel vergelijkingen:

$$(x - 3)(x - y - 2) = 0$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 2$$

b) Teken t.o.v. een rechthoekig coördinatenstelsel $XOY$ de verzameling van de punten waarvan de coördinaten aan de eerste vergelijking voldoen. Vervolgens de verzameling v. d. punten, waarvan de coördinaten aan de 2e vergelijking voldoen. Controleer, of het onder a) gevonden resultaat overeenstemt met de verkregen figuur.

Hier wordt dus van een stukje algebra een meetkundige illustratie gevraagd.

Vraagt men naar het minimum van $x^2 + y^2$, als gegeven $x + 2y = 4$,[1]) dan is een meetkundige illustratie hiervan de lengte van de loodlijn uit $O$ op de lijn $x + 2y = 4$ te bepalen. Zou men dit laatste in de analytische meetkunde willen doen, dan schrijft men direct $2x - y = 0$ of nog eenvoudiger, men gebruikt de normaal-vergelijking van Hesse.

Gaarne geef ik nu de volgende methode in overweging.

Na de behandeling van het stelsel vergelijkingen van de eerste graad met 2 onbekenden, voeren we een coördinatenstelsel in. Het bepalen van punten is eenvoudig. Nu moet men echter *niet* lijnen gaan tekenen en daarvan de vergelijking bepalen, maar men moet punten zoeken, waarvan de coördinaten b.v. aan de verg. $x - 2y = 3$ voldoen. Zo nog enkele voorbeelden, waarbij dan telkens een rechte lijn ontstaat. Daarna systematisch b.v. $y = x$; $y = 2x$; $y = ax$;

---

[1]) Dr. P. G. J. Vredenduin wees me er op, dat ik hier in het midden laat, wat ik met $x + 2y = 4$ feitelijk bedoel; als het een vergelijking is, dan is hier weer een vermenging van de *functie* $x^2 + y^2$ en de *vergelijking* $x + 2y = 4$. Hij zou willen spreken van de relatie $x + 2y = 4$ en dus ook de grafiek van een relatie willen beschouwen. Alhoewel dit wetenschappelijk gesproken wel beter is, zou ik toch voor de schooljeugd willen vasthouden aan de grafiek van de vergelijking. Overigens is het doel van dit stukje ook beperkter: meetkundige illustratie van een stukje algebra, zonder analytische meetkunde te gebruiken.

$y = ax + b$; $ax + by + c = 0$. De resultaten noemen we de meetkundige voorstelling van de vergelijking of eventueel het meetkundig beeld of de meetkundige illustratie. We blijven dan in de algebra en stellen analytische meetkunde tot veel later uit. We spreken dus *niet* over de *vergelijking* van een lijn, maar over de *grafische voorstelling* van een *vergelijking.*

Bij 2 strijdige verg. v. d. 1e graad met 2 onbekenden, hoort dan het meetkundig beeld van 2 evenwijdige lijnen.

De opgave b van het aangehaalde vraagstuk uit Kruytbosch kan dan luiden: controleer meetkundig het gevondene in a).

In het aangehaalde artikel van Dr. Koksma wordt de volgende „verbinding" gelegd: de grafiek van de *functie* $f(x)$ is de lijn met *vergelijking* $y = f(x)$.

Nu kan dit luiden: de grafiek van de functie $f(x)$ is de grafische voorstelling van de vergelijking $y = f(x)$.

Later in de analytische meetkunde zullen dan „grafische voorstelling van een vergelijking" en „vergelijking van een lijn" door elkaar gebruikt worden. Zeker, als we in het begin van lijnen, cirkels, parabolen enz. de vergelijkingen bepalen, dan gaat de meetkunde voorop; als we echter de algemene verg. v. d. 2e graad opschrijven, dan gaan we onderzoeken, wat voor soort krommen hier bij horen; dus eigenlijk zoeken we de grafische voorstelling van de vergelijking!

Voor de leerlingen die in het geheel geen analytische meetkunde krijgen, lijkt me bovenstaande methode een iets meer afgerond geheel te bieden. Heeft men bezwaar tegen de uitdrukking „grafische voorstelling van een vergelijking", omdat men verwarring vreest met de grafieken van functies, dan kan even goed gesproken worden van een „meetkundig beeld of een meetkundige illustratie van een vergelijking."

# WELKE ONDERWERPEN UIT DE STERRENKUNDE ZIJN VOOR HET GYMNASIUM VAN BELANG? [1]

door

Dr. W. J. Claas

Leiderdorp

*De plaats van de sterrenkunde in het gymnasiale onderwijs.*

De sterrenkunde wordt in ons land intensief beoefend. Sinds het begin van deze eeuw nemen Nederlandse astronomen een vooraanstaande plaats in bij het vooruitbrengen van hun wetenschap, of zij zich nu binnen de landsgrenzen dan wel in de Verenigde Staten van Noord-Amerika, in Zuid-Afrika of Australië bevinden. Een, vergeleken met andere landen, relatief groot aantal mensen in ons land voelt zich tot de sterrenkunde aangetrokken en beoefent in hun vrije tijd het vak als amateur, waarbij door sommigen voortreffelijke resultaten, van wetenschappelijke waarde, worden verkregen.

Hier staat tegenover dat de sterrenkunde in het Nederlandse V.H.M.O. een zeer bescheiden plaats inneemt. Momenteel is de situatie bij het gymnasiale onderwijs zelfs paradoxaal.

In de B-afdeling komt de sterrenkunde niet op het programma voor. Er kan iets aan gedaan worden bij het vak aardrijkskunde, onder de naam wis-en natuurkundige aardrijkskunde. Men zou kunnen menen dat de opstellers van de hierop betrekking hebbende bepaling er nog een geocentrisch wereldbeeld op na hebben gehouden. Overigens heeft in de praktijk datgene wat onder de naam wis- en natuurkundige aardrijkskunde gedoceerd wordt even weinig met sterrenkunde gemeenschappelijk als deze naamsaanduiding. In de A-afdeling ligt de zaak merkwaardigerwijze iets gunstiger; daar is althans de mogelijkheid om een inleiding tot de sterrenkunde te geven sinds in klasse V A enkele uren voor natuurwetenschappen zijn uitgetrokken. Van deze mogelijkheid wordt vermoedelijk slechts incidenteel gebruik gemaakt.

Moeten we met deze situatie tevreden zijn? Voorstanders van een grotere plaats in het gymnasiale onderwijs voor de sterrenkunde

[1]) Voordracht gehouden op de vergadering van Liwenagel te Driebergen op 30 augustus 1962.

zullen hun standpunt met vuur verdedigen; hun staan daarbij goede argumenten ter beschikking. Tegenstanders van veranderingen, wat de positie van de sterrenkunde betreft, zullen zich niet onbetuigd laten; ook zij hebben redenen bij de hand om zich niet zonder meer uit het veld te laten slaan. De afgelopen maanden is in de dagbladpers en in de onderwijsbladen iets van deze discussie openbaar geworden, in het kader van de regeling van het sterrenkunde-onderwijs in de nieuwe wet op het V.W.O. Ook binnenskamers is er wel iets gebeurd. Ten departemente weet men daar van; de onderwijscommissie van de Nederlandse Astronomen Club speelt er een rol in; Liwenagel is er o.a. bij betrokken. De vererende uitnodiging om deze voordracht te houden is mede een gevolg van de ontstane beweging.

Nu is het niet de bedoeling om op het ogenblik een pleidooi te houden voor een ruimere plaats, aan de sterrenkunde in het gymnasiale onderwijs toe te delen. Er moge slechts gewezen worden op nieuwe mogelijkheden die ontstaan, nu de Mammoetwet dichter bij haar inwerkingstelling is gekomen na de aanvaarding door de Tweede Kamer van de Staten-Generaal. Als ik goed ben ingelicht, komen er in de toekomst ook bij het gymnasiale onderwijs kern- en keuzevakken, zoals dat momenteel reeds bij de M.M.S. het geval is. Voor de keuzevakken zouden ongeveer twintig wekelijkse lesuren beschikbaar komen, te verdelen over de klassen III, IV, V en VI. Op de lijst der keuzevakken komt zeer waarschijnlijk de sterrenkunde te staan; daarmee is de mogelijkheid geopend om de sterrenkunde onder eigen naam bij het gymnasiale onderwijs te betrekken.

In verband met dit perspectief worden hier enkele wensen naar voren gebracht:

1. Het onderwijs in de sterrenkunde worde tot de klassen V en/of VI beperkt.
2. In het geval dat afzonderlijke lijsten van keuzevakken voor de A- en de B-afdeling worden opgesteld, worde de sterrenkunde op beide lijsten geplaatst.
3. Het onderwijs in de sterrenkunde aan de A-leerlingen dient niet gezamenlijk met dat aan de B-leerlingen te worden gegeven.
4. Over het aantal uren dat uitgetrokken wordt, behoeft nu niet uitvoerig te worden gesproken. Slechts zij gewezen op de mogelijkheid van twee wekelijkse lesuren gedurende een halve cursus als equivalent van één wekelijks lesuur gedurende een gehele cursus. De eerste mogelijkheid verdient de voorkeur, omdat het effect van twee wekelijkse lesuren in een bepaald vak groter is dan tweemaal het effect van één wekelijks lesuur in dat vak.

Argumenten voor het eerste drietal wensen worden niet expliciet genoemd; U vindt ze in het volgende betoog verspreid en u kunt ze er gemakkelijk uit lichten.

*Het doel van het sterrenkunde-onderwijs.*

Welk doel heeft het sterrenkunde-onderwijs aan onze gymnasiasten? Een hedendaags antwoord op deze vraag is het volgende: *Het onderwijs in de sterrenkunde werkt ertoe mee de plaats van de mens in het heelal te bepalen.* In de formulering van dit antwoord is de invloed van de fenomenologische wijsbegeerte merkbaar. In de fenomenologie wordt toch de mens in zijn relatie tot de wereld als uitgangspunt van het denken gekozen.

Twee aspecten komen direct naar voren:
1. De vraag naar de structuur van het heelal.
2. De relatie tussen de mens en de stoffelijke natuur.

De eerste vraag is van objectief-wetenschappelijke aard. Een natuuronderzoeker uit de klassieke periode zou haar als de enige relevante beschouwd hebben, ook voor het *onderwijs* in de sterrenkunde. Nu in de moderne natuurwetenschap de object-subject-relatie een wezenlijk probleem is geworden, waarmee vooraanstaande onderzoekers zich bezig houden, is het niet alleen uit belangstelling voor de fenomenologische denkwijze, dat naast de vraag naar de structuur van het heelal die over de relatie tussen de mens en de stoffelijke natuur gesteld wordt. Trouwens, iedere bezinning over de aard van de natuurwetenschappelijke werkzaamheid, welke juist ook bij het vormend onderwijs een rechtmatige plaats inneemt, voert onvermijdelijk tot deze tweede vraag. En zelfs als een docent haar liever zou willen ontwijken, omdat hij vreemder tegenover de bezinning op de natuurwetenschappelijke werkzaamheid staat dan tegenover het beoefenen van de natuurwetenschap, èn omdat hij afkerig is van filosofische invloeden — grootgebracht in de klassieke traditie van het natuurwetenschappelijk onderwijs als hij is — dan nog zullen zijn leerlingen hem er wel toe bepalen. Zij zoeken immers naar de plaats van de mens in het ingewikkelde bestel rondom hen en komen ongetwijfeld met hun vragen hierover aandragen als de gelegenheid daarvoor gunstig is, en ook wanneer dit uit didactisch-methodisch oogpunt nog niet het geval is.

*De structuur van het heelal.*

Het ligt voor de hand om bij het onderwijs over de structuur van het heelal aan te sluiten bij elementaire dagelijkse ervaringen, waarbij het aan docenten die reeds sterrenkunde hebben gegeven bekend

is hoe vaag, verward en onjuist in dit opzicht de voorstellingen van vele leerlingen kunnen zijn. Uitgaan van de dagelijkse ervaringen betekent dat eerst het geocentrisch wereldbeeld aan de orde komt. Hierin spelen de rotatie van de aarde en de bewegingen van zon, maan en planeten de hoofdrol. De overgang van geocentrisch op heliocentrisch wereldbeeld is een boeiend hoofdstuk dat stellig niet mag worden overgeslagen, wegens zijn betekenis in de geschiedenis van de natuurwetenschappen en in de verhouding tussen natuurwetenschappen en natuurfilosofie. Aan het levenswerk van Kepler en Galileï, die de scheidslijn tussen de antieke en de klassieke periode der natuurwetenschap hebben gemarkeerd, kan niet voorbijgegaan worden.

In dit gedeelte van de besprekingen staat de gravitatiewet van Newton, met zijn betekenis voor de sterrenkunde van de 17de—19de eeuw, centraal. Enkele vereenvoudigende veronderstellingen verschaffen de mogelijkheid om door toepassing van deze wet de massa van de aarde en die van de zon te berekenen. Voor de leerlingen gaat hiermee een nieuwe wereld open: het is mogelijk om massa's te bepalen, waarbij a.h.w. een wiskundige formulering van een natuurwet als balans fungeert! Een korte bespreking van wat hemelmechanica is kan nu volgen; de invloed van storingen op de beweging van de maan leent zich voor aanschouwelijke illustratie. De triomfen der hemelmechanica met de ontdekkingen van Neptunus en Pluto, langs theoretische weg, maar evenzeer de nauwkeurige voorspelling van het optreden van zons- en maansverduisteringen, horen in het hoofdstukje over de hemelmechanica thuis.

Als afsluiting van deze besprekingen volgt een overzicht van de bouw van het zonnestelsel, met zijn regelmaat in de afstanden van de planeten tot de zon (de wet van Titius-Bode), de geringe hellingshoeken van de baanvlakken der planeten t.o.v. het eclipticavlak, het ontbreken van een planeet tussen Mars en Jupiter met in plaats daarvan een groot aantal planetoïden, de manen en maantjes om sommige planeten, de kometen en meteorieten. Ongemerkt komt de natuurkundige gesteldheid van planeten, kometen en meteorieten aan de orde en daarmee een tweede dimensie van de sterrenkunde: de fysica der hemellichamen neemt naast de hemelmechanica een belangrijke plaats in. Een derde tak dient zich spoedig aan met de vraag: Hoe is het zonnestelsel ontstaan en hoe ontwikkelt het zich in de toekomst? Op deze vraag kan geen definitief antwoord gegeven worden. Dit behoeft geen beletsel te zijn om de vraag te stellen en, bij voldoende belangstelling van docent en leerlingen, enige aandacht te besteden aan de pogingen die in het werk gesteld zijn om

antwoorden te vinden. Wel dient daarbij de nadruk gelegd te worden op het speculatieve element in deze pogingen.

Is dit nu allemaal stof voor de A- èn de B-leerlingen? Met reserve meen ik, in grote lijnen, van wel. Direct moet hieraan worden toegevoegd dat de behandelingswijze voor beide categorieën nogal uiteenlopend dient te zijn. Het is bijv. veel eenvoudiger om met B-leerlingen de gravitatiewet van Newton toe te passen ter bepaling van de massa's van de aarde en de zon dan dit met A-leerlingen te doen. In het algemeen kan de illustratie van de stof bij de A-leerlingen het meest geschikt met behulp van aanschouwelijke meetkundige figuren plaatsvinden; bij de B-leerlingen kunnen bovendien algebraïsch-analytische formuleringen van natuurwetten op gepaste wijze gehanteerd worden. Dit verschil in behandelingswijze houdt in dat de kinematische beschrijving van de verschijnselen in het zonnestelsel bij de A-leerlingen sterker op de voorgrond treedt dan bij de B-leerlingen. Men vindt ongetwijfeld een goede gelegenheid om de invloed van de natuurfilosofische gedachten van Plato en Aristoteles op de ontwikkeling van het geocentrisch wereldbeeld te bespreken en na te gaan, waarom in de 16de en 17de eeuw de zware strijd nodig was om de natuurwetenschap zowel van het geocentrische wereldbeeld als van de beklemmend geworden invloed van de natuurfilosofie uit Oudheid en Middeleeuwen te bevrijden.

Hoe belangrijk de besprekingen over het zonnestelsel ook mogen zijn, het zou onjuist zijn als zij het grootste deel van de gehele cursus in de sterrenkunde opeisten. Op deze wijze zouden de leerlingen een verwrongen beeld van het heelal krijgen, nl. de voorstelling dat het zonnestelsel er de kern van vormt. Het kan ook anders gezegd worden: wanneer eenzijdig de nadruk op de behandeling van het zonnestelsel zou liggen, zou het onderwijs in de sterrenkunde in wezen 19de-eeuws zijn. Waar de astronomie zich juist in onze eeuw zo snel heeft ontwikkeld, en met name het onderzoek van de natuurkundige gesteldheid der hemellichamen, van de structuur van het melkwegstelsel en, in mindere mate, van het heelal der galactische stelsels grote vorderingen heeft gemaakt, dienen de hoofdzaken daarvan bij het onderwijs aan de orde te komen. Het onderwijs in de sterrenkunde dient zich op de ontwikkeling van het sterrenkundig onderzoek zelf te richten. Nu dreigt hier een gevaar: juist door de snelle ontwikkeling van het sterrenkundig onderzoek is het mogelijk dat men bij het kennis nemen van de vorderingen in ons inzicht het overzicht over het geheel verliest en dus als docent niet in staat is om op enigszins bevredigende wijze de essentiële dingen door te geven, met voorbijzien van allerlei details.

Om dit gevaar zoveel mogelijk te vermijden, kan de stof om enkele centrale thema's gegroepeerd worden. Dergelijke thema's hebben vanzelfsprekend geen absolute waarde. De ontwikkeling van de sterrenkunde kan het wenselijk maken dat, ter bevordering van een goede overdracht van onze kennis, deze thema's op een gegeven ogenblik door andere worden vervangen. Daarom is het nodig dat de docenten in de sterrenkunde de ontwikkeling van het vak voortdurend blijven volgen. We komen daar straks nog op terug.

Ik wil nu enkele onderwerpen noemen die als raam kunnen dienen bij de opbouw van de stof. Vooropgesteld zij dat de gedane keuze subjectief is, gebonden als zij is aan de visie van degeen die ze aan u voorlegt. Anderen prefereren misschien een totaal verschillende wijze van aanpak. Het is goed dat de gedachtenwisseling hierover op gang komt. Deze is het vruchtbaarst, wanneer ervaring met onze leerlingen wordt opgedaan.

Als centrale onderwerpen bij de bespreking van de structuur van ons melkwegstelsel en van andere melkwegstelsels kunnen het Hertzsprung-Russel-diagram en de populatie-indeling van Baade dienen. Naar beide onderwerpen wordt dus allereerst toegewerkt. Daarbij komt al heel wat ter sprake. Het Hertzsprung-Russell-diagram geeft een verdeling van de sterren van een sterrenstelsel in een aantal groepen te zien, doordat de lichtkracht van een ster tegen zijn spectraaltype is uitgezet, of — in het tegenwoordig veel gebruikte kleur-helderheidsdiagram — tegen de zg. kleurindex, d.i., het verschil tussen de fotografische en visuele helderheid van de ster. Zowel het spectraaltype als de kleurindex is een maat voor de oppervlaktetemperatuur van de ster. Het sterspectrum als belangrijke informatiebron komt op deze wijze ter sprake, evenals de moderne methode om met behulp van fotocellen sterhelderheden te bepalen, zowel in het fotografische als in het visuele gebied van het spectrum. Om de helderheid van een ster in zijn absolute lichtkracht te kunnen omzetten, moet de afstand van de ster bekend zijn; zo komt tevens het probleem van de afstandsbepaling aan de orde.

De verdeling van de sterren in het Hertzsprung-Russell- of kleur-helderheidsdiagram leidt tot een kennismaking met enkele stersoorten, zoals: wit-blauwe reuzen en superreuzen, rode reuzen, subreuzen, dwergen, subdwergen en witte dwergen. Bij de verklaring van deze namen komen o.a. de afmetingen en de massa's van sterren ter sprake en de methoden om deze af te leiden.

Om de populatie-indeling van Baade, d.i. de indeling van de sterbevolking in twee hoofdgroepen, te begrijpen is kennismaking met nieuwe hemelobjecten nodig: veranderlijke sterren (speciaal de

δ-Cepheïden en de RR-Lyrae-veranderlijken) met hun karakteristieke verschillen in de periode van lichtwisseling en in hun spectraaltype, de gas- en stofwolken tussen de sterren, de open sterhopen en de bolvormige sterhopen. De donkere wolken tussen de sterren nodigen uit tot een beschouwing over de radiosterrenkunde en haar betekenis voor de astronomische ontwikkeling. De grote waarde van Baade's populatie-indeling wordt eerst duidelijk nadat aandacht is geschonken aan de mogelijkheid om de scheikundige samenstelling van hemellichamen, waarbij de zon het eerste voorbeeld is, uit hun spectra af te leiden. Anderzijds komen de middelen, die de sterrenkundigen ten dienste staan om iets over de leeftijd van sterren te weten te komen, ter sprake. Hierbij spelen de samenhang tussen de wit-blauwe (super)reuzen en de interstellaire gas- en stofwolken, alsmede de verschillen tussen open en bolvormige sterhopen een rol. De ruimtelijke verdeling van de hemelobjecten, voor Baade één van de belangrijke criteria om tot zijn indeling te komen, moet tenslotte in dit verband ook aan de orde worden gesteld.

Nu is het ogenblik gekomen om een blik buiten ons melkwegstelsel te wagen. De „nabije" galactische stelsels vertonen in grote trekken drie soorten van vormen: de sterk afgeplatte spiraalstelsels, de elliptische stelsels en de onregelmatige stelsels. Verrassend is het te zien dat er een verband gelegd kan worden tussen de populatie-indeling (eventueel verfijnd) en de structuur en samenstelling van een galactisch stelsel. De waarde van Baade's indeling voor de moderne sterrenkunde komt op deze wijze treffend naar voren.

Evenals bij de bespreking van het zonnestelsel komt de vraag aan de orde: Kunnen we iets van de evolutie van ons melkwegstelsel en van andere melkwegstelsels begrijpen? Zowel de populatie-indeling van Baade als de kleur-helderheidsdiagrammen van sterhopen kunnen met de evolutie van sterren in verband worden gebracht. De grondslagen van de evolutietheorie zijn momenteel voldoende gefundeerd om er een schets van te geven. Daarbij komen enkele interessante aspecten naar voren, zoals het aandeel van de gravitatiewerking en van kernprocessen bij de evolutie van een ster, de samenhang tussen jonge sterren en emissienevels, het verschil in scheikundige samenstelling tussen jonge en oude sterren. Bovendien wordt de energieproduktie in sterren en de zon, waardoor het leven op onze planeet in stand gehouden wordt, begrepen. Er is echter nog meer: het is mogelijk om, aanknopend bij de populatie-indeling, een verband te leggen tussen structuur en evolutie van een melkwegstelsel. Momenteel zijn betrouwbare aanknopingspunten aanwezig om de relatie tussen de plaats van een stersoort in een

melkwegstelsel, de leeftijd en de scheikundige samenstelling van de tot die soort behorende sterren enigszins te overzien.

Het is goed mogelijk om met de kort geschetste behandelingswijze een groot deel van een cursus van één jaar met twee wekelijkse lesuren te vullen. Toch is het gewenst om naast de beide reeds genoemde grote onderwerpen — het zonnestelsel en het melkwegstelsel — nog een derde onderwerp onder Uw aandacht te brengen, nl. de structuur van het heelal der melkwegstelsels.

De galactische stelsels vormen a.h.w. de bouwstenen van het heelal. De structuur van deze bouwstenen is in het voorgaande aan de orde geweest. Hoe staat het nu met het bouwwerk als geheel? Het is nuttig dat aan dit onderwerp, hoe onafgesloten het onderzoek daarover nog is, enige aandacht wordt besteed. Allereerst is daar de waargenomen roodverschuiving van de spectraallijnen in de spectra van melkwegstelsels, met zijn interpretatie als Dopplerverschuiving en als consequentie daarvan het beeld van het uitdijend heelal. In de tweede plaats kan iets over de verdeling van de galactische stelsels in de ruimte aan de orde komen; door de betekenis van de verdeling der sterren in de ruimte voor Baade's populatie-indeling te accentueren, is het mogelijk om duidelijk te maken dat de ruimtelijke verdeling van de melkwegstelsels door de astronomen bestudeerd wordt in de hoop daardoor een inzicht in de bouw van het heelal der melkwegstelsels te verkrijgen. Als derde punt kan de vraag gesteld worden tot hoe ver wij melkwegstelsels in het heelal kunnen waarnemen, omdat daarmee de samenhang tussen afstand (ruimte) en tijd aan de orde komt. Natuurlijk kan reeds bij de invoering van de lichtseconde en het lichtjaar als afstandsmaten terloops ter sprake zijn gebracht dat astronomische afstandsbepaling met tijdsbepaling samenhangt. Ieder peilen van de ruimte is tevens een terugblikken in de tijd! Deze samenhang komt bij het onderzoek naar de structuur van het heelal op duidelijke wijze te voorschijn; tevens treedt aan het licht dat het speuren naar de structuur van het heelal hand in hand gaat met het pogen om de evolutie ervan te begrijpen.

Het ligt voor de hand dat de uitwerking van de geschetste stof in de B-afdeling uitvoeriger zal kunnen zijn dan in de A-afdeling. Voor de B-leerlingen is het aantrekkelijk om te zien hoe de sterrenkundigen bij het zoeken naar de structuur van het heelal en zijn onderdelen gebruik maken van natuurwetten, theorieën en methoden die in de natuur- en scheikunde-lessen ter sprake zijn gekomen. Voorbeelden: de rol die de gravitatie speelt bij de bouw en de evolutie van individuele sterren en van melkwegstelsels; de voor-

stellingen omtrent de atoombouw; het machtige hulpmiddel van de spectroscopie om inlichtingen over de straling van sterren en emissiewolken te verkrijgen. Natuur- en scheikunde blijken waardevolle hulpwetenschappen voor de astronoom te zijn bij zijn streven om structuur en evolutie van het heelal te doorgronden. Het is heel goed mogelijk om dit aan onze B-leerlingen duidelijk te maken.

Voor de A-leerlingen liggen de zaken moeilijker. Zij zijn niet erg vertrouwd met de natuurwetenschappelijke denkwijze en methoden; grondbegrippen als massa, stralingsenergie met haar quantisering, lading, elektrische en magnetische velden, gravitatievelden, potentiële en kinetische energie spreken hen veel minder aan dan dat bij de B-leerlingen het geval is. Dit betekent allereerst dat de docent zich bij het gebruik van dergelijke begrippen voortdurend moet realiseren dat zij op voor de A-leerlingen bevattelijke wijze moeten worden toegelicht, zodat zij voor hen gaan leven. Het gevolg is dat, wanneer voor de A-leerlingen dezelfde tijd ter beschikking staat als voor de B-leerlingen, met hen veel minder specifiek sterrenkundige problemen behandeld kunnen worden. Het komt mij voor dat in dit geval de nadruk sterker op de structuur van het melkwegstelsel en van het heelal zal komen te liggen dan op evolutieproblemen. Met het geschetste schema als leidraad zou aan de populatie-indeling van Baade de voorkeur gegeven kunnen worden boven het kleur-helderheidsdiagram, en wel om de volgende redenen:

1. Er is een duidelijke samenhang tussen de populatie-indeling en de structuur van het melkwegstelsel.
2. Een zorgvuldige bespreking van de populatie-indeling leidt tot kennismaking met een grote verscheidenheid van hemelobjecten (reuzen- en dwergsterren, bolvormige en open sterhopen, interstellair gas en stof, veranderlijke sterren), tot een bespreking van de methode der spectraalanalyse om de scheikundige samenstelling van hemellichamen te bepalen, enz., waardoor een ruim gebied van de sterrenkunde wordt bestreken.
3. Wil men evolutieproblemen niet geheel verwaarlozen, dan biedt de populatie-indeling gelegenheid om ze aan de orde te stellen. Omgekeerd kan echter niet gezegd worden dat het kleurhelderheidsdiagram zich leent om op ongedwongen wijze structuurproblemen van het melkwegstelsel te behandelen.

*De relatie tussen de mens en de stoffelijke natuur.*

Tot nu toe is de nadruk gelegd op het verkrijgen van inzicht in de bouw en de evolutie van het heelal en zijn bouwstenen. We

zagen echter reeds dat de mens in zijn betrekking tot de stoffelijke natuur een nadere beschouwing waard is. Daarbij komen drie onderwerpen aan de orde:

1. De bewoonbaarheid van andere hemellichamen dan de aarde.
2. De mens doet aan ruimtevaart en ruimte-onderzoek.
3. De bezinning van de mens op wezen en begrenzing van zijn natuurwetenschappelijke werkzaamheid.

Over ieder van deze drie onderwerpen maken we enkele opmerkingen:

Ad 1). De vraag naar de bewoonbaarheid van andere hemellichamen houdt in de eerste plaats het probleem in of leven buiten de aarde mogelijk is resp. voorkomt. Hoewel de leerlingen dit probleem stellig bij de besprekingen over het zonnestelsel aan de orde zullen stellen, en er bij die gelegenheid voorlopig op kan worden ingegaan, is er alle reden om er nogeens op terug te komen nadat een inzicht in de verscheidenheid van de sterren, wat scheikundige samenstelling en oppervlaktetemperatuur betreft, en van hun plaats in een melkwegstelsel, verkregen is. Biologische vragen komen naar voren, zoals: welke voorwaarden moeten vervuld zijn, opdat leven in de zin zoals wij dat kennen, mogelijk is? De rol welke oppervlaktetemperatuur en scheikundige samenstelling van het hemellichaam hierbij spelen, komt te voorschijn; dit leidt tot de vraag in welke delen van een melkwegstelsel sterren gevormd kunnen zijn (worden), in verband met de samenstelling van het aanwezige interstellaire gas en stof, die aan deze voorwaarden voldoen. Het zal duidelijk zijn dat dit gehele onderwerp zich beter leent tot een behandeling in de B-afdeling dan in de A-afdeling.

Ad 2). De belangstelling voor de bewoonbaarheid van andere hemellichamen hangt ook samen met het tweede genoemde onderwerp: De mens doet aan ruimtevaart. Onder ruimtevaart verstaat men de beweging van met levende wezens, speciaal de mens, bemande projectielen, buiten de aardse dampkring (voorlopig nog in hoge dampkringslagen). De sterrenkunde is vooralsnog niet direct bij deze ruimtevaart betrokken; het gaat bij de ruimtevaart, afgezien van politieke en militaire doelstellingen, momenteel om de gedragingen van mens, dier en plant in omstandigheden welke totaal verschillend zijn van die in de biosfeer, en natuurlijk ook om de oplossing van technische problemen. Het is heel goed mogelijk dat de ruimtevaart in de toekomst haar bijdrage tot de ontwikkeling van de sterrenkunde gaat leveren, wanneer namelijk mensen (en dan bij voorkeur natuuronderzoekers) in een projectiel om de maan geleid worden of daarop landen, teneinde natuurwetenschappelijk onder-

zoek te verrichten. Zolang dit niet het geval is, moet het belang van de ruimtevaart voor de sterrenkunde niet overschat worden. Dit behoeft ons er niet van te weerhouden om bewondering te koesteren voor de technische prestaties die momenteel geleverd worden. De leerlingen hebben deze bewondering zonder aarzeling. Het is goed dat de docent een nuchtere bewondering kan opbrengen, waarbij getracht wordt de ruimtevaart in haar juiste proporties te zien en haar betekenis voor samenleving en wetenschap op zijn waarde te peilen. Stellig geen eenvoudige opgave!

Het ruimte-onderzoek, waarbij van waarnemingsinstrumenten voorziene projectielen in de ijlste dampkringslagen of buiten de dampkring worden geschoten, heeft nu reeds waarde voor de astronomie. In de korte tijd dat dit onderzoek wordt gedaan zijn belangrijke resultaten verkregen, zoals de ontdekking van de Van Allen-gordels om de aarde en andere planeten en het opnemen van ver-ultraviolette spectra van de zon en van enkele heldere sterren.

De bespreking van ruimtevaart en ruimte-onderzoek leent zich voortreffelijk tot het bepalen van de positie van de mens t.o.v. de natuur rondom hem. De waardering van het woordje „ruimte" is in de combinaties ruimtevaart en ruimte-onderzoek verschillend. Bij de ruimtevaart gaat het voorlopig om een technische beheersing van projectielen en om de aanpassing van het leven aan tot voor kort ongekende omstandigheden; in de toekomst komt daarbij een verruiming van de betekenis van het woordje „wereld" in de uitspraak dat „de mens de wereld beheerst", doordat de maan en eventueel enkele andere planeten tot deze lijfelijk bereikbare wereld gaan behoren. Men zou dus kunnen zeggen dat het woordje „ruimte" in ruimtevaart een gedeelte van het zonnestelsel aanduidt. In ruimte-onderzoek heeft het woordje „ruimte" de traditioneel natuurwetenschappelijke betekenis. Dit onderzoek staat, met zijn moderne methoden, ten dienste van de mens die denkend het heelal doorvorst met het doel te begrijpen wat hij om zich ziet gebeuren, dicht bij en lijfelijk onbereikbaar ver weg. Hier komt de vraag naar voren wat ruimte eigenlijk is. De samenhang van het fysische ruimtebegrip met wat de natuuronderzoeker energie noemt (in de vorm van straling, massa of elektromagnetisch dan wel gravitatieveld aanwezig) is door de relativiteitstheorie naar voren gekomen. Het fysische ruimtebegrip onderscheidt zich dus van het wiskundig ruimtebegrip, waarin vectoren en tensoren een belangrijke rol spelen, maar waarin het fysische begrip energie niet voorkomt.

Ad 3). Deze laatste opmerking brengt ons bij de bezinning van de mens op wezen en begrenzing van zijn natuurwetenschappelijke

werkzaamheid. Daar is in de eerste plaats de begrenzing van de natuurwetenschap tegenover de wiskunde. Juist waar bij het natuurwetenschappelijk onderzoek van de wiskunde als hulpwetenschap een dankbaar gebruik wordt gemaakt, is het gewenst dat op een gegeven ogenblik het eigen karakter zowel van de wiskunde als van de natuurwetenschap naar voren komt. In de tweede plaats voert dit eigenlijk vanzelf tot een plaatsbepaling van de natuurwetenschap in ruimer verband. Vragen als de volgende komen naar voren:

„Wat doet de mens eigenlijk als hij natuurwetenschap bedrijft? Welke zijn de grenzen van dit natuurwetenschappelijk bezig zijn? Welke relatie is er tussen natuurwetenschap en filosofie? Hoe is de verhouding tussen natuurwetenschap en religie?" Dergelijke vragen bieden gelegenheid tot discussies, die voor de docent zowel als voor de leerlingen van grote waarde kunnen zijn. Het is niet onmogelijk dat deze discussies met de A-leerlingen uitgebreider zijn dan met de B-leerlingen. Voor de A-leerlingen is het aftasten van de grenzen van de natuurwetenschappen t.o.v. filosofie en geesteswetenschappen, die zich eveneens met de mens bezighouden als cultuurscheppend, sociaal en religieus wezen, van betekenis. Wanneer deze problemen later bij een geesteswetenschappelijke vorming aan een universiteit of elders ter sprake komen, vindt dit stellig vanuit de geesteswetenschappelijke denkhouding en sfeer plaats. Het is nuttig dat tevoren kennis gemaakt is met dezelfde problematiek vanuit de natuurwetenschappelijke denkhouding en aanpak.

*De uitvoerbaarheid van het voorgestelde programma.*

Het is begrijpelijk dat langzamerhand hier en daar bedenkingen zijn opgekomen. Is het geschetste programma niet te ambitieus? Gaat het niet te ver?

Om eventuele misverstanden uit de weg te ruimen: het is zeker niet de bedoeling dat de geschetste onderwerpen en hun uitwerking imperatief worden voorgeschreven. Veeleer zijn zij bedoeld als leidraad voor de docent bij het indelen van de stof die hij wenst te behandelen. Het zou wenselijk zijn dat bij het uitwerken ervan niet steeds dezelfde accenten worden gelegd. De reacties van de leerlingen zullen trouwens, als het goed is, mee bepalend zijn voor de onderwerpen die uitgekozen worden. Het is een voordeel dat de sterrenkunde niet aan een eindexamen gebonden wordt. Hierdoor heeft de docent binnen een algemeen kader een grotere mate van vrijheid tot stofindeling, naar de omstandigheden van iedere cursus, dan bij een aan een examen gebonden vak mogelijk is. Natuurlijk

wordt de taak van de docent hierdoor niet eenvoudiger. Hij zal veel tijd aan de voorbereiding van zijn lessen moeten besteden, iedere keer opnieuw dat hij deze cursus geeft, stellig meer dan bij een min of meer vastliggend programma het geval is. Hij zal bovendien een grote mate van soepelheid moeten bezitten om snel te kunnen reageren op vragen van leerlingen, waardoor de besprekingen in een geheel andere richting kunnen gaan dan de bedoeling was. Juist met het oog hierop kan het geschetste programma zijn diensten bewijzen. Het kan fungeren als een raam bij dergelijke omzwervingen, dat het mogelijk maakt om iedere bespreking toch weer in het grote geheel te passen.

Een tweede bedenking is stellig: Waar kan de in het bovenstaande geschetste stof gevonden worden? Ondanks de verschillende opzet van de bestaande sterrenkunde-boeken, die voor de h.b.s. zijn geschreven, kan in sommige daarvan het één en ander gevonden worden dat voor ons doel dienstig is. Vooral het tweede deel van het didactisch zo uitstekende boek van M. L. Kobus en Dr. J. J. Raimond Jr. bevat veel dat bruikbaar is. In hetgeen we reeds opmerkten ligt feitelijk opgesloten dat iedere docent zijn eigen cursus samenstelt en voortdurend omwerkt, daarbij de ontwikkeling van de sterrenkunde aandachtig volgend. Hem staan goede overzichten ter beschikking, die voortdurend door vooraanstaande sterrenkundigen worden geschreven. Vooral in Engeland, de Verenigde Staten en Australië is men in dit opzicht actief. Over de geschiedenis van de sterrenkunde en over haar relatie tot de wiskunde, de natuurkunde en de natuurfilosofie hebben onze landgenoten Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis en Prof. Dr. A. Pannekoek op voortreffelijke wijze geschreven. Hiernaast kan gewezen worden op de verslagen van colloquia, welke regelmatig door de Nederlandse Astronomen Club worden uitgegeven. Deze verslagen geven samenvattende overzichten van actuele onderzoekingen, van de resultaten die daarbij verkregen zijn en van de problemen die nog op een oplossing wachten. In de derde plaats zijn er tijdschriften waarin voortdurend belangwekkende artikelen over de ontwikkeling van de moderne sterrenkunde verschijnen. Naast Hemel en Dampkring, Sky and Telescope kunnen in dit verband ook The Scientific American en Physics to-day genoemd worden. Tenslotte mogen de avondcursussen, die de Utrechtse Sterrenwacht reeds enkele jaren organiseert, niet onvermeld blijven. Deze cursussen vormen een belangrijke bron van informatie voor iedere docent die op de hoogte wil blijven van wat in de sterrenkunde actueel is.

We komen tot het moeilijkste deel van deze voordracht, nl. het

slot. De moderne sterrenkunde is dermate levend dat men wel een begin met de studie ervan kan maken, maar er nooit mee klaar komt; er is geen einde! Het doordenken van het probleem, welke onderwerpen zich het beste lenen tot een behandeling bij het gymnasiale onderwijs, bevindt zich pas in een beginfase; van een afgerond stuk werk is in dit opzicht evenmin sprake. Met het oog hierop komt het mij het verstandigst voor om geen fraai klinkende slotzinnen te bedenken en het hierbij te laten.

## VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

(Delft)

### LIII. *Karakteristieke eigenschap van een gelijkzijdige driehoek.*

Is $O$ een punt in het vlak van de gelijkzijdige driehoek $ABC$, dan kan men altijd met $OA$, $OB$ en $OC$ als zijden een (eventueel ontaarde) driehoek beschrijven. Deze uitspraak, zeer eenvoudig van aard en in enkele regels te bewijzen is de laatste jaren herhaaldelijk in het nieuws geweest en wordt gemakshalve de stelling van Pompeïu genoemd. Zij houdt een karakteristieke eigenschap in van de gelijkzijdige driehoek; immers voor elke andere driehoek zijn punten $O$ te vinden waarvoor de afstanden tot de hoekpunten *niet* aan de driehoeksongelijkheid voldoen. Het onderzoek naar deze punten is het onderwerp geweest van een in dit tijdschrift verschenen opstel.[1])

Wij wijden enkele woorden aan een pendant van de stelling waaruit evenzeer een karakteristieke eigenschap van de gelijkzijdige driehoek volgt.

Met $OA$, $OB$ en $OC$ als zijden kan men dus steeds een driehoek construeren. Krijgt men nu door $O$ te variëren ook alle mogelijke driehoeken? Ten duidelijkste niet, want er zijn $\infty^3$ verschillende driehoeken en met de constructie krijgt men er slechts $\infty^2$. Maar deze collectie hangt nog van de zijde van $ABC$ af en als men ook deze varieert krijgt men althans een verzameling van de goede di-

---

[1]) O. Bottema, *De stelling van Pompeïu*, Euclides 37, (1962) 273—285.

mensie. Daar alle gelijkzijdige driehoeken gelijkvormig zijn en een schaalverandering ook alle bijbehorende driehoeken gelijkvormig wijzigt, komen wij tot de vraag: ***kan men steeds een punt O vinden zodat OA, OB en OC de zijden zijn van een driehoek die gelijkvormig is met een gegeven driehoek PQR***? En als die vraag bevestigend mocht worden beantwoord, is die uitspraak dan karakteristiek of geldt zij ook wel voor de een of andere niet-gelijkzijdige driehoek?

Wij beschouwen maar dadelijk het algemene geval. Gegeven zijn twee willekeurige driehoeken $ABC$ (met zijden $a$, $b$ *en* $c$) en $PQR$ (met zijden $p$, $q$ *en* $r$). Construeer in het vlak van $ABC$ een punt $O$ zodat $OA : OB : OC = p : q : r$. Wij kiezen eerst een primitieve, maar zoals wij later zullen zien omslachtige oplossingsmethode. Wij veronderstellen gemakshalve $p < q \leqq r$. Het geval $p = q$ geeft geen bijzondere moeilijkheden. De meetkundige plaats van de punten $O$ waarvoor $OA : OB = p : q$ is een cirkel $K_3$ (middelpunt $M_3$, straal $R_3$), die waarvoor $OA : OC = p : r$ is een cirkel $K_2$ (middelpunt $M_2$, straal $R_2$). Een eventueel snijpunt van $K_3$ en $K_2$ voldoet aan de vraag.

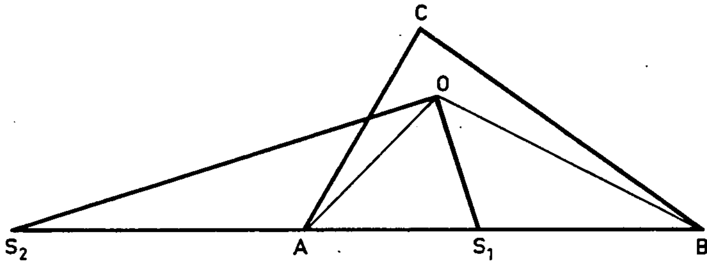


Fig. 1.

De cirkel $K_3$ snijdt $AB$ in $S_1$ en $S_2$ (fig. 1) zodanig dat $AS_1 = \dfrac{pc}{p+q}$, $AS_2 = \dfrac{pc}{p-q}$ als de afstand van $A$ naar $B$ positief wordt genomen. Hieruit volgt $AM_3 = \frac{1}{2}(AS_1 + AS_2) = \dfrac{p^2c}{p^2-q^2}$ en $R_3 = \frac{1}{2}(AS_1 - AS_2) = \dfrac{pqc}{p^2-q^2}$. Op overeenkomstige wijze krijgt men voor $M_2$, dat op $AC$ ligt $AM_2 = \dfrac{p^2b}{p^2-r^2}$, terwijl $R_2 = \dfrac{-prb}{p^2-r^2}$. De afstand $M_2M_3$ kan nu uit de driehoek $AM_2M_3$ worden bepaald. Men heeft

$$M_2M_3^2 = \frac{p^4}{(p^2-q^2)^2(p^2-r^2)^2}\{c^2(p^2-r^2)^2 + b^2(p^2-q^2)^2 - 2bc(p^2-r^2)(p^2-q^2)\cos\alpha\}$$

$$= \frac{p^4}{(p^2-q^2)^2(p^2-r^2)^2}\{a^2(p^2-q^2)(p^2-r^2)$$
$$+ b^2(q^2-r^2)(q^2-p^2) + c^2(r^2-p^2)(r^2-q^2)\}$$

Hieruit volgt

$$F_1 = (R_2+R_3)^2 - M_2M_3{}^2 =$$
$$\frac{p^2}{(p^2-q^2)(p^2-r^2)}(ap+bq+cr)(-ap+bq+cr)$$

en, b.v. na vervanging van $b$ door $-b$:

$$F_2 = M_2M_3{}^2 - (R_2-R_3)^2 =$$
$$\frac{p^2}{(p^2-q^2)(p^2-r^2)}(ap-bq+cr)ap+bq-cr)$$

De cirkels $K_2$ en $K_3$ snijden elkaar alleen dan als $F_1\ F_2 > 0$, zij raken elkaar als $F_1\ F_2 = 0$. Dus: *er bestaat een punt O dan en alleen dan als $ap$, $bq$ en $cr$ aan de driehoeksongelijkheid voldoen.*

Er zijn twee punten, $O_1$ en $O_2$, indien de met $ap$, $bq$ en $cr$ als zijden te vormen driehoek $\triangle$ niet ontaard is; daar $K_2$ en $K_3$ beide loodrecht staan op de omgeschreven cirkel van driehoek $ABC$, liggen $O_1$ en $O_2$ ten opzichte van deze cirkel invers.

Is de driehoek $\triangle$ ontaard, dan is er één, op de omgeschreven cirkel gelegen punt $O$.

Ons eenvoudig resultaat is veel korter met inversie te bereiken. Voert men op de figuur $ABCO$ een inversie uit met centrum $A$ en macht $m^2$ (fig. 2) dan gaan $B$, $C$ en $O$ over in de punten $B'$, $C'$ en $O'$ zodanig dat $B'C' = \frac{m^2a}{bc}$, $B'O' = \frac{m^2q}{pc}$ en $C'O' = \frac{m^2r}{pb}$ waaruit volgt $B'C' : B'O' : C'O' = ap : bq : cr$.

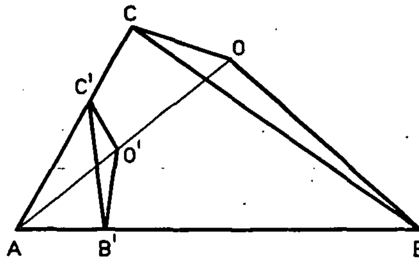



Fig. 2.

De genoemde driehoeksongelijkheid is dus inderdaad *noodzakelijk*. Zij is voor de construeerbaarheid van $O$ ook *voldoende*. Men kan nu immers nadat de inversie op $B$ en $C$ is toegepast op $B'C'$ als zijde een driehoek construeren die met $\triangle$ gelijkvormig is en wel, als $\triangle$

niet ontaard is, op twee manieren. De toppen $O_1'$ en $O_2'$ liggen gespiegeld ten opzichte van $B'C'$ en zijn de inversies van de twee gevraagde punten $O_1$ en $O_2$; deze zullen gespiegeld liggen ten opzichte van de omgeschreven cirkel die immers de inverse figuur van $B'C'$ is.

Wij merken nog op dat de driehoek $\triangle$ niets anders is dan een *antiparallelle doorsnede* van het (in ons geval ontaarde) viervlak $ABCO$.

Voorts volgt nog uit de symmetrie van onze betrekking: als er een punt $O$ bestaat zodanig dat $OA$, $OB$ en $OC$ zich verhouden als de zijden van driehoek $PQR$, dan is er ook een punt $O^*$ zodanig dat $O^*P$, $O^*Q$ en $O^*R$ zich verhouden als de zijden van $ABC$.

Wij komen nu terug op de aanvankelijk gestelde vraag. Is $a = b = c$ dan is voor $ap$, $bq$ en $cr$ de driehoeks-ongelijkheid automatisch vervuld, want het is die voor $p$, $q$ en $r$. Dus: door het veranderlijke punt $O$ te verbinden met de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek krijgt men inderdaad de zijden van driehoeken van elke vorm. Zij nu echter $ABC$ niet gelijkzijdig; is $a \geqq b \geqq c$, dan is dus $a > c$. Neem nu $p = b$, $q = k(a - c)$, $r = b$ waarin $0 < k < 1$, dan bestaat de (gelijkbenige) driehoek $PQR$. Maar uit $ap = ab$, $bq = k(ab - bc)$, $cr \doteq bc$ volgt $ap - bq - cr = b(a - c)(1 - k) > 0$.

Mitsdien is voor $ap$, $bq$ en $cr$ de driehoeksongelijkheid niet vervuld, en een punt $O$ bestaat dus niet. Wij hebben dus de volgende stelling: *Dan en alleen dan als $ABC$ gelijkzijdig is bestaat er voor elke gegeven driehoek $PQR$ een punt $O$ zodanig dat $OA$, $OB$ en $OC$ zich verhouden als $QR : RP : PQ$.*

Een bijzonder geval van onze algemene relatie is nog dat waarbij $ABC$ en $PQR$ gelijkvormig zijn. Voor de existentie van twee punten $O_1$ en $O_2$ zodanig dat $OA$, $OB$ en $OC$ zich verhouden als $a$, $b$ en c is blijkbaar noodzakelijk en voldoende dat $a^2$, $b^2$ en $c^2$ aan de driehoeksongelijkheid voldoen, dus dat $ABC$ scherphoekig is. Deze uitspraak staat in onmiddellijk verband met de bekende stelling: in een gelijkvlakkig viervlak (dat is een viervlak waarvan overstaande ribben evenlang zijn) zijn de begrenzende driehoeken scherphoekig.

# EEN WELKOME UITGAVE

door

PROF. DR. E. W. BETH

(Amsterdam)

In juli 1957, op weg van Berkeley, Calif., naar Cornell, stapten mijn Vrouw en ik, na een prachtige tocht dwars door de staat Wyoming, bij onze vrienden Henkin te Laramie af. Zij hielden daar tijdelijk verblijf omdat Leon Henkin in opdracht van de National Science Foundation aan de University of Wyoming een Summer Institute for Teachers of Mathematics leidde. Ik had zodoende het genoegen, één van zijn voortreffelijk voorbereide colleges over *Foundations of Mathematics* te kunnen bijwonen en getuige te zijn van de bijval die zijn uiteenzetting, gewijd aan verschillende aspecten van de volledige inductie, bij een gehoor van een honderdtal deelnemers, meest leraren in de wiskunde, verwierf.

Het boek waarop ik hier de aandacht wil vestigen[1] bracht deze reiservaring weer in herinnering. Het geeft, samengevat tot een afgerond geheel, de stof die op bovenbedoeld Summer Institute en later bij enkele soortgelijke bijeenkomsten werd voorgedragen. Kort gezegd, is het gewijd aan het onderwerp dat bij ons als de *ontwikkeling van het getalbegrip* bekend staat. Voor de lezers van *Euclides* zal dus de lectuur van het werk van Henkin c.s. in de meeste gevallen niet de eerste kennismaking met de behandelde materie betekenen.

Wanneer ik deze lectuur niettemin warm aanbeveel dan geschiedt dat wegens de bijzondere hoedanigheden van de uiteenzetting. Het onderwerp wordt namelijk behandeld op een wijze die ik zou willen kenmerken als diepgaand, breedvoerig en volledig.

Als *diepgaand*, omdat de grondslagen van de opeenvolgende uitbreidingen van het getalbegrip, te weten: de logica, de verzamelingenleer en de axiomatische rekenkunde volgens Dedekind en Peano uitdrukkelijk aan de orde worden gesteld; de bespreking van deze onderwerpen zal ongetwijfeld verhelderend werken.

Als *breedvoerig*, omdat de schrijvers geen gelegenheid laten voorbijgaan om allerlei voor de hedendaagse wiskunde kenmerkende begrippen: groep, semi-groep, ring, integriteitsgebied, lichaam e.d., in de uiteenzetting te betrekken.

Als *volledig*, omdat de definities en stellingen die bij de ontwikke-

---

[1]) Leon Hendin, W. Norman Smith, Verne J. Varineau, Michael J. Walsh, *Retracing Elementary Mathematics*, Allendoerfer Mathematics Series, The Macmillan Company, New York 1962. xviii + 418 pp.

ling van het getalbegrip een rol spelen, zorgvuldig geformuleerd en *c.q.* streng bewezen worden. Van tijd tot tijd wordt aandacht besteed aan kwesties die de „*techniek*" van definitie en bewijsvoering betreffen.

De hier bedoelde hoedanigheden maken het boek tot een voortreffelijke inleiding tot de hedendaagse wiskunde. De schrijvers hebben letterlijk niets nagelaten om de studie voor de lezer zo gemakkelijk en zo rendabel mogelijk te maken. Het zijn de maatregelen die zij tot dit doel hebben getroffen die de omvang tot ruim 400 pp. hebben opgevoerd; zij merken trouwens op dat men zich desgewenst tot de lezing van een aantal hoofdstukken kan beperken die een samenhangend geheel vormen en die met elkaar slechts ruim 200 pp. voor zich opeisen.

Ik zou het boek van Henkin c.s. warm willen aanbevelen in de belangstelling van de lezers van *Euclides*. De uiteenzetting is ongetwijfeld toegankelijk voor iedere Nederlandse leraar in de wiskunde. Het boek eist niettemin gezette studie gedurende een vrij lange periode. Daardoor ontstaat het risico dat bij onderbreking gedurende enige zwaar met proefwerken e.d. bezette weken de animo verloren gaat. Dit risico kan voor een belangrijk deel worden ondervangen door studie in groepsverband, vooral als één der deelnemers reeds enigszins met de stof vertrouwd is en dus in staat, een zekere leiding te geven.

De studie zal ongetwijfeld bij verschillende lezers verschillende indrukken achterlaten. Naar ik aanneem zal echter, de bijzondere heldere betoogtrant ten spijt, maar heel zelden de indruk ontstaan dat de behandelde stof nu zo heel gemakkelijk is.

Niettemin heeft blijkbaar bij het schrijven van het boek, en bij alles wat daaraan voorafging, de ook door mij gedeelde overtuiging voorgezeten dat deze stof een plaats verdient op het leerplan voor het voortgezet wetenschappelijk onderwijs. Dat betekent natuurlijk nog geenszins dat men bij de behandeling op school het boek van Henkin c.s. zou moeten of zou kunnen volgen. Integendeel, het is maar al te duidelijk dat ook hier aan een compromis tussen de eisen van de wetenschap en de mogelijkheden van de school niet te ontkomen valt.

Om echter te kunnen komen tot een didactisch verantwoord en wetenschappelijk houdbaar compromis, en om in overeenstemming met dat compromis het onderwijs met een goed geweten te kunnen geven, zal de leraar zelf een goed gefundeerd inzicht in de te behandelen stof moeten bezitten. Een zodanig inzicht kan men zich thans aan de hand van het boek van Henkin c.s. verschaffen.

# DE AMERIKAANSE TEST

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

(Oosterbeek)

Voor de Fourteenth Mathematics Contest, die ontworpen is door de Mathematics Association of America en de Society of Actuaries, bestond grote belangstelling. In totaal hebben 42 scholen deelgenomen met 2063 leerlingen. De resultaten zijn:

| klasse | aantal scholen | aantal leerlingen | gemiddelde score |
|---|---|---|---|
| h.b.s.-B4 | 29 | 1164 | 19,8 (29,2) |
| h.b.s.-B5 | 20 | 482 | 28,7 (40,1) |
| gymnasium-B5 | 22 | 291 | 18,2 (27,5) |
| gymnasium-B6 | 13 | 126 | 30,2 (46,2) |

Het gemiddelde van alle prestaties bedraagt 22,3.

De getallen in de kolom gemiddelde score, die tussen haakjes geplaatst zijn, zijn de verleden jaar behaalde gemiddelden. (Vgl. het verslag van de vorige test in Euclides **37**, p. 286—287.)

Verleden jaar bleek, dat de resultaten behaald in gymnasium 5 achterbleven bij die behaald in h.b.s. 4, maar dat daarentegen de resultaten in gymnasium 6 een voorsprong vertoonden vergeleken bij die in h.b.s. 5. Het materiaal was betrekkelijk gering en het was dus de vraag, of het gebleken verschil significant was. Zeer merkwaardig is, dat het toen geconstateerde verschijnsel zich dit jaar opnieuw voordoet. Ik waag het niet hieruit een conclusie te trekken. Een nader onderzoek naar de achtergronden van het gevonden verschil lijkt mij gewenst.

Het aantal leerlingen, dat meer dan 80 punten behaalde, was ditmaal slechts 1. Deze leerling was R. N. van der Neut, leerling van het Stedelijk gymnasium te Utrecht, die met 96,50 punten royaal de eerste prijs verwierf. De tweede prijs viel ten deel aan S. Reintsema, leerling van de Dalton h.b.s. te Groningen, met 76,50 punten.

Om enig inzicht in de spreiding te krijgen, volgen hier de laagste en hoogste gemiddelden behaald in de verschillende klassen. Daarbij zijn klassen van 5 of minder leerlingen buiten beschouwing gelaten. De getallen tussen haakjes zijn de aantallen leerlingen van de klassen, die deze gemiddelden behaalden.

| klasse | laagste gemiddelde | hoogste gemiddelde |
|---|---|---|
| h.b.s.-B4 | 12,9 (23) | 27,9 (49) |
| h.b.s.-B5 | 20,7 (18) | 39,0 (29) |
| gymnasium-B5 | 10,6 (19) | 28,1 (9) |
| gymnasium-B6 | 24,3 (16) | 37,7 (19) |

In Luxemburg behaalden 79 deelnemers een gemiddelde score van 22,75; de hoogste score was daar 74,75.

In de Verenigde Staten en Canada is aan de test deelgenomen door ongeveer 200.000 leerlingen van 6300 scholen. Het gemiddelde resultaat is niet bekend. Wel is uitgerekend, dat de mediaan (middelste score) 32 was, terwijl eerste en derde kwartiel resp. 23 en 44 bedroegen. Het aantal deelnemers, dat 80 of meer behaalde, bedroeg 227. De hoogste score was 146.

De beloofde exemplaren met de Engelse tekst zijn weliswaar uit Amerika verzonden, maar helaas nooit bij mij aangekomen.

## DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematica & Paedagogia* (VIII, 22, 1962).

F. Bingen, Trivecteur, déterminant, volume, orientation;
G. Bosteels, Het oplossen van stelsels;
L. Félix, Sur le diagramme de Venn;
J. Williot, Algèbre linéaire et géometrie analytique;
N. Vermeulen, La correction du langage dans les manuels de mathématiques.

*Mathematica & Paedagogia* (VIII, 23, 1962).

G. Noel, Théorie analytique des diviseurs élémentaires d'une matrice;
A. Z. Krygowska, L'enseignement de la géométrie dans la mathématique unitaire d'aujourd'hui;
G. Papy, L'enseignement de la mathématique dans le tronc commun;
E. Bouque, Modernisatie ook in de niet-experimentele zesde;
M. Kassab, Sur la formation mathématique au niveau du secondaire.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public* (XLII, 229, janvier-février 1963).

G. Choquet, L'analyse et Bourbaki;
A. Huisman, Les mathématiques „modernes" dans l'enseignement du second degré;
J. Siros, Quatre exercices sur les coniques par la descriptive;
A. Danjon, Sur la nouvelle définition de l'unité de temps;
J. Kuntzmann, Les mathématiques appliquées et l'enseignement du second degré.

*Bulletin* (XLII, mars 1963).

F. Brachet, Quatre sphères dont on parle;
G. Walusinski, Quelques exercices sur les distances;
R. Robbé, Aller a l'idéal et comprendre le réel.
Documents officiels: Rapport sur les épreuves théoriques du C.A.P.E.S. (1962) et Notes sur termes et symboles.

3. *Praxis der Mathematik* (V, 1, Januar 1963).

Kl. Wigand, Rechenmaschinen im Sexta;
K. H. Hürten, Aufnahmeprüfung der Sextaner;
G. Polya, Der Logiker, der Mathematiker, der Physiker und der Ingenieur;
H. Dücker, Mathematische Probleme in der Biologie;
W. Ness, Oberfläche einer Kugelzone;
A. Engel, Schulsystem und Mathematikunterricht in der Sowjetunion.

*Praxis der Mathematik* (V, 2, Februar 1963).

G. Gathmann, Logische Schulung in der Unter- und Mittelstufe;
A. Engel, Zu einem Problem von Kursawe;
Verslagen van een conferentie: Vektoren im Unterricht (Detmold, 1962);
Tagung zur Geometrie-Axiomatik (Oberwolfach, 1962).

*Praxis der Mathematik* (V, 3, März 1963).

W. L. Fisher, Mengentheoretische Topologie;
E. Hermann, Beispiele zum Mehr-Personen-Spiel;
A. Engel, Wahrscheinlichkeit und Primzahlen;
R. Wolff, Ein Flächenverwandlungsproblem für Muszestunden;
J. Groeneveld, Ein Problem der Mechanik.

4. *Elemente der Mathematik* (XVIII, 1, Januar 1963).

H. P. Künzli und W. Oettli, Nichtlineare Programmierung;
P. H. Müller, Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise;
M. Jeger, Friedrich Bachmann's ,,Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff''.

*Elemente der Mathematik* (XVIII, 2, März 1963).

A. Loeffler, Sur la puissance d'un point par rapport à une conique;
H. Hadwiger, Ungelöste Probleme (über die Parkettierung des Raumes),
J. Berkes, Einige Dreiecksungleichungen.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XV, 8, Januar 1963).

K. Strubecker, Geometrie in einer isotropen Ebene;
J. Weniger, Gewicht- Kraft und Mass-Kilogramm und Kilopond - Grundsätzliches zu einem wieder aktuell gewordenen Problem;
G. Schuster, Vielfalt in der Einheit.

*Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XV, 9, Februar 1963).

K. Strubecker, Geometrie in einer isotropen Ebene (Fortsetzung);
W. Siedentop, Zu den Berliner Plänen für die Wahlpflichtfächer Physik, Chemie und Biologie;
A. Kraft, Zur abbildungsgeometrischen Behandlung der Winkel am Kreis.

*Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XV, 10, März 1963).

K. Fladt, Die Entwicklung des geometrischen Unterrichts an den deutschen Gymnasien im den letzten hundert Jahren;

O. Delvendahl, Über die algebraische Struktur des Gröszenkalküls der Physik;

W. Krücken, Raum, Zeit, Relativität.

6. *The Mathematical Gazette* (XLVI, 358, December 1962).

S. M. Gould, The origin of Euclid's axioms;

W. B. Bonnor, The future of applied mathematics;

H. Lindgren, Dissecting the decagon;

E. M. Bishop, The use of the pentagram in constructing the net for a regular dodecahedre.

*The Mathematical gazette* (XLVI, 359, Febr. 1963).

G. Matthews, Matrices for the million;

G. S. Smithers, Modern mathematics in fifth forms;

H. M. Cundy, The school mathematics project.

7. *School Science and Mathematics* (LXVII, 1, 552, January 1963).

R. Sweet and P. Dunn-Rankin, Making a geometry movie;

D. Mazkewitsch, The amusing number 11;

H. Winthrop, The structure of simple problems and their solutions;

*School Science and Mathematics* (LXVII, 2, 553, February 1963).

R. H. Pray, Color theory through algebra of sets;

C. C. Read, Elementary Probability;

W. W. Bryan, Some modern uses of mathematics;

D. Cohen, On organizing a mathematics league.

*School Science and Mathematics* (LXVII, 3, 554, March 1963).

R. R. Buell, Mathematics education research in Sweden;

F. V. Feser, An aid in the solution of certain quadratic equations.

8. *The Mathematics Teacher* (LVI, 1, January 1963).

H. Levi, Why arithmetic works;

L. E. Allen, Towards autotelic learning of mathematical logic;

St. S. Willoughby, Discovery;

W. E. Rollins a.o., Concepts of mathematics – a unique program of high school mathematics for the gifted student.

*The Mathematics Teacher* (LVI, 2, February 1963).

John G. Kemeny, Report to the international congress of mathematicians at Stockholm;

L. E. Hirschi, Encouraging creativity in the mathematics class-room;

R. W. Feldmann, Matrix equations;

Ch. H. Wells Jr, Using a negative base for number notation;

M. Stephanie, Venn diagrams.

9. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* (VIII, 2, 1962).

H. Gericke, Der Beweis im Wandel der Zeiten;
J. Dieudonné, Moderne Mathematik und Unterricht auf höheren Schulen;
H. Behnke, Die Anfängervorlesung zur Infinitesimalrechnung an den deutschen Universitäten;
J. E. Hofmann, Über Viète's Beiträge zur Geometrie der Einschiebungen;
H. R. Müller, Konstruktive Abbildungen des mehrdimensionalen Raumes.

## PROMOTIES

In deze rubriek beperkt de Redactie zich tot gevallen, waarbij in proefschrift of stellingen kwesties ter sprake komen, die in verband staan met de didactiek der wiskunde van het v.h.m.o.

1. Op 6 februari 1963 promoveerde tot doctor in de technische wetenschappen aan de Technische Hogeschool te Delft

G. R. VELDKAMP

lector aan de T.H. te Delft en redacteur van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde op een proefschirft getiteld: „Curvature theory in plane kinematics".
Aan de stellingen ontlenen we:

XV.

Tegen de vervanging van de term *meetkundige plaats* door het woord *verzameling* zijn ernstige bezwaren aan te voeren.

Verslag van de Nomenclatuurcommissie,
Euclides **35**, II, blz. 70.
A. MAASSEN, *Verzamelingen en relaties*,
Euclides **37**, IV, blz. 107.
G. AUMANN, *Reelle Funktionen*, Berlin (1954) blz. 73

XVI.

Men kan ernstige bedenkingen opperen tegen de methode die Vredenduin aanbeveelt om het begrip limiet van een functie in te voeren. Bovendien zijn de argumenten waarop deze auteur zijn voorkeur voor deze methode baseert geenszins overtuigend.

*Modernization of Mathematical Teaching in the Netherlands*, report of the subcommittee for the Netherlands of the international commission on mathematical instruction, edited by F. Loonstra and P. G. J. Vredenduin, Groningen (1962) p. 48—52.

2. Op 8 mei 1963 promoveerde tot doctor in de wiskunde en natuurwetenschappen aan de Universiteit van Amsterdam

D. VAN DALEN,

medewerker aan het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht op een proefschrift getiteld: Extension problems in intuitionistic plane projective geometry".
Aan de stellingen ontlenen we:

IX.

Zowel tegen de argumenten waarmee P. G. J. VREDENDUIN betoogt dat „men bij de rechtvaardiging van de contrapositie door een bewijs uit het ongerijmde in een vicieuze cirkel geraakt" als tegen de conclusie zelf zijn bezwaren in te brengen.

P. G. J. Vredenduin. De contrapositie en het bewijs uit het ongerijmde.
Euclides, **38**, 1962, p. 20.

XI

Het zou de wiskunde-beoefening ten goede komen indien in ruimere mate in wiskunde-tijdschriften problemen gepubliceerd werden.

XII.

Gezien de plaats, die de film zich in het culturele leven heeft verworven, is het wenselijk dat de filmkunst in het middelbaar onderwijs betrokken wordt.

## BOEKBESPREKING

*Introduction to Elementary Functions* by W. J. Combellack, Uitgever: John Wiley Sons Inc. New York-London. 340 blz., prijs: 53 s.

Deze inleiding tot elementaire functies, behandeld worden: de zes goniometrische functies (met vlakke trigonometrie), de exponentiële en logaritmische functie, is bedoeld voor studenten met een wiskunde ondergrond van ongeveer drie jaar middelbare school. Behalve de genoemde functies vindt men nog behandeld: determinanten van de 3e orde, de analytische meetkunde (zonder vectoren), zoals ons schoolprogramma eist, het principe van volledige inductie en iets over complexe getallentheorie.

Het opvallende van dit boek is echter het fundament, waarop de theorie is opgebouwd. Voorop staat het begrip „verzameling". Reeds § 1 behandelt het Cartesiaans produkt van twee verzamelingen, zodat de begrippen „relatie", „functie" en „functionaal verband" abstract gedefinieerd kunnen worden. Voor leerlingen, die dat vatten kunnen, doet de waarschuwing op blz. 14, dat men $f(x)$ vooral niet moet opvatten als $f \times x$ wel erg naïef aan. Hoofdstuk II kan men als toegift beschouwen. Dit kan n.l. gerust overgeslagen worden en komt m.i. ook te vroeg.

Met behulp van 15 axioma's wordt een „Boole Algebra" gedefinieerd. Deze algebra bevat, zoals bekend, twee duale operaties, die beide gehoorzamen aan de *commutatieve* en *associatieve* wet, terwijl ze t.o.v. elkaar *distributief* zijn. Elke operatie bezit een neutraal element. Of een leerling in dit stadium van ontwikkeling, zich snel thuis zal voelen in deze algebra lijkt me twijfelachtig. Het zou bovendien goed geweest zijn, als schrijver iets verteld zou hebben over de toelaatbaarheid van het aannemen van 15 axioma's.

T.o.v. axioma's 11 en 12 zou ik willen opmerken, dat deze suggereren, dat de inverse van $a$ t.o.v. de ene bewerking, dezelfde is als die t.o.v. de tweede. Het was te prefereren geweest, indien axioma II luidde: Bij elk element $a$ bestaat slechts één element $a'$ zò dat $a \wedge a' = I$.

En axioma 12: Bij elk element $a$ bestaat slechts één element $\bar{a}$ zò dat $a \wedge \bar{a} = Z$.

En dan: $a' = \bar{a}$,

Als model voor een Boole algebra (0,1) worden als operaties gekozen de parallel- en serieschakeling, als elementen: open en gesloten.

Als tweede model tenslotte de propositionele logica met de operaties „en" en „of", de elementen juist en onjuist.

De uitgave is keurig verzorgd. Achter in het boek vindt men aanwijzingen en antwoorden behorende bij het groot aantal toegevoegde vraagstukken.

Burgers

## GROEP L.I.W.E.N.A.G.E.L.

*Ledenvergadering op vrijdag 30 augustus 1963*
*om 14.30 uur in het Centrum 'Hydepark' te Driebergen*

**Agenda**

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 7 van 19 oktober 1962 en in Euclides nr. VI van 1 maart 1963).
3. Verslag van de kascommissie.
4. Voordracht door de heer R. Troelstra, Hilversum, over: 'Transformatiemeetkunde in de lagere klassen van het V.H.M.O.'
5. Pauze.
6. Voordracht door de heer Bruno Ernst, Oudenbosch, over: 'Is invoering van de rekenliniaal bij het V.H.M.O. gewenst?'
7. Rondvraag.
8. Sluiting.

D. Leujes, secretaris.

# RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

91. a. Men heeft een vierkant, dat verdeeld is in 16 kleine vierkanten. In deze kleine vierkanten staan de getallen 1 tot en met 15, terwijl één vierkantje open blijft. De getallen staan in willekeurige volgorde. Men mag nu telkens één getal één plaats verschuiven in horizontale of verticale richting naar de open plaats. Gevraagd wordt als eindstand te bereiken de stand, waarin de 15 getallen in natuurlijke volgorde staan en het vak rechts onder open blijft. Neem nu eens aan, dat de beginstand is b.v.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 5 | 8 |
| 15 | 3 | | 9 |
| 10 | 4 | 12 | 14 |
| 1 | 13 | 11 | 6 |

en dat men na schuiven als stand bereikt heeft

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

Nu moeten dus nog de 14 en de 15 verwisseld worden. Hoe krijgt men dat gedaan?

b. En hoe krijgt men het gedaan, als men als eindstand moet hebben

| | | | |
|---|---|---|---|
| NE | DE | RL | AN |
| DE | N | 18 | 45 |
| VE | RZ | EK | ER |
| IN | G | EN | |

en men heeft alle vierkantjes op zijn plaats gekregen met uitzondering van de laatste twee? In de onderste regel heeft men dus gekregen IN EN G, zodat EN en G nog verwisseld moeten worden.

92. Men heeft een gezelschap van $n$ personen. Elk paar van deze personen haat elkaar of heeft elkaar lief. Het aantal $n$ heeft een zodanige waarde, dat als geen drie personen van het gezelschap elkaar alle haten, er ten minste één drietal is, waarvan alle drie elkaar liefhebben. Welke waarden kan $n$ hebben?

93. Hoeveel paarden kan men maximaal op een schaakbord plaatsen, als men eist, dat geen paard door een paardesprong een van de andere paarden kan bereiken?

## OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

88. Elke zijde van een parallellogram is evenwijdig aan een zijde van een ander parallellogram, enz. Zo verdergaande ziet men, dat elke zijde van een parallellogram evenwijdig is aan twee zijden van de vierhoek. De zijden van de vierhoek zijn dan twee aan twee evenwijdig. Hun aantal kan dus alleen even zijn.

89. Onderstel het aantal halve lijnen is oneven, b.v. 11. In bijgaande figuur zijn de 11 halve lijnen zo getekend, dat links van de lijn, waarvan $a$ deel uitmaakt, 6 en rechts 4 halve lijnen liggen. Beweegt men nu $a$ naar rechts over een hoek $\Delta\varphi$, dan zullen 6 van de hoeken $\Delta\varphi$ groter worden en 4 hoeken $\Delta\varphi$ kleiner. Dus kan het maximum niet bereikt zijn, als ter weerszijden van de lijn, waarvan $a$ deel uitmaakt niet 5 halve lijnen zich bevinden. Dit geldt voor elk van de halve lijnen. Het maximum wordt dus o.a. bereikt, als de lijnen onderling gelijke hoeken maken. Is het aantal halve lijnen even, dan ziet men op dezelfde manier in, dat het maximum alleen bereikt wordt, als de lijnen gelijke hoeken maken.

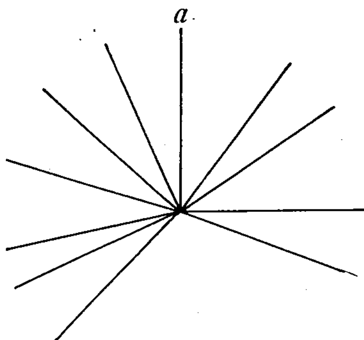
De gevraagde som is dus voor $n$ oneven:

$$\frac{360°}{n}\,(n + 2n + 3n + \ldots + (\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2})n)$$

en voor $n$ even:

$$\frac{360°}{n}\,(n + 2n + \ldots + (\tfrac{1}{2}n - 1)n + \tfrac{1}{2}n \cdot \tfrac{1}{2}n).$$

Deze uitkomsten kunnen gemakkelijk vereenvoudigd worden.




90. We stellen de vraag liever eerst iets anders. Wat is de grootste waarde van $n$, waarvoor geldt, dat we de getallen $1, 2, \ldots, n$ zo kunnen rangschikken in een rij, dat daaruit geen opklimmende of afdalende deelrij van 11 getallen gekozen kan worden?

Onderstel, dat $n$ aan de gestelde eis voldoet en de getallen $1, 2, \ldots, n$ zo gerangschikt zijn, dat er een opklimmende rij van 10 getallen uit te vormen is. Schrap deze 10 getallen. Er zijn nu twee mogelijkheden: uit de overblijvende $n - 10$ getallen is weer een opklimmende rij van 10 getallen te vormen of er is hoogstens een opklimmende rij van 9 getallen uit te vormen. Onderstel er is een opklimmende rij van 9, maar geen van 10 getallen uit te vormen. Deze rij is $p_1, p_2, \ldots, p_9$. Las nu in de oorspronkelijke rij direct achter $p_9$ een getal $p_9 + 1$ in (als dit getal al voorkomt, dan wordt de rij opnieuw genummerd). De oorspronkelijke rij is dan uitgebreid tot

een rij van $n + 1$ getallen, die nog steeds aan de voorwaarde voldoet, dat er geen opklimmende of afdalende rij van 11 getallen uit gevormd kan worden.

Zo door redenerend vinden we, dat de oorspronkelijke rij opgebouwd is uit een aantal series van 10 opklimmende getallen. Het is niet moeilijk in te zien, dat de beginelementen van deze series een afdalende rij moeten vormen. Er kunnen dus hoogstens 10 beginelementen zijn. D.w.z. de oorspronkelijke rij bevat hoogstens $10 \cdot 10 = 100$ elementen.

Hiermee is reeds bewezen, dat uit een rij van 101 getallen in elk geval een opklimmende of afdalende deelrij van 11 getallen gekozen kan worden.

Ten overvloede merken we nog op, dat er inderdaad een rij van 100 getallen bestaat, waaruit geen opklimmende of afdalende deelrij van 11 gekozen kan worden, nl. de rij

$$10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 20, 19, 18, \ldots, 30, 29, 28, \ldots, 100, 99, 98, \ldots, 91.$$

# BERICHTEN

## *Het Econometrisch Instituut - Rotterdam*

Van het rapport over de opbouw van de kwantitatief-economische studierichting te Rotterdam waarvan in Euclides **37**, p. 209 een uittreksel verscheen, is een nieuwe versie uitgegeven, betrekking hebbende op het komende academische studiejaar. Belangstellenden kunnen gratis een exemplaar ontvangen door aanvrage bij het secretariaat van het Econometrisch Instituut, Pieter de Hoochweg 120, Rotterdam-6.

## *Onderzoek aan de Rijksuniversiteit te Utrecht betreffende: geprogrammeerd leren en 'teaching machines'*

De Afd. Leraarsopleiding van het Pedagogisch Instituut aan de Rijksuniversiteit te Utrecht heeft een onderzoek aangevangen met betrekking tot het z.g.n. geprogrammeerd leren. Een studie zal worden gemaakt van de mogelijkheden die geboden worden door het toepassen van de lineaire en vertakte programma's en het gebruiken van de bijbehorende cursussen, boeken (al of niet 'scrambled') en apparaten ('teching machines'). Het onderzoek zal zich richten op het gebruik bij het onderwijs in vrijwel alle vakken van het V.H.M.O., op de toepassingsmogelijkheden bij het lager, technisch en hoger onderwijs, en op het analyseren van het leerproces. De wetenschappelijke hoofdambtenaren voor de didactiek van de afzonderlijke vakken, aan bovengenoemde afdeling verbonden, zullen zich met de desbetreffende werkzaamheden bezighouden, terwijl de algemene leiding berust bij Dr. L.N.H. Bunt.

Een zo volledig mogelijke documentatie van literatuur, cursussen en apparaten is in voorbereiding en er is een aanvang gemaakt met het samenstellen van geprogrammeerde cursussen waarmee zal worden geëxperimenteerd.

Het onderzoek zal bevorderd kunnen worden door een ruimere medewerking. In verband hiermee wordt personen en instellingen die zich voor dit onderzoek interesseren verzocht daarvan mededeling te doen aan Dr. Bunt, Afd. Leraarsopleiding, Lucas Bolwerk 11, Utrecht.